

Exercice N° 1 : (4 pts)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte.
Indiquer sur votre copie le numéro de la question et la réponse choisie.

1) L'aire de la partie du plan limité par les courbes d'équations: $y = x + 1$ et $y = 1$ et les droites d'équations: $x = -2$ et $x = 1$ vaut:

- a) $\frac{-3\pi}{2} ua$ b) $\frac{5\pi}{2} ua$ c) $\frac{-3}{2} ua$ d) $\frac{5}{2} ua$

2) Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$ est une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction f définie par :

- a) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ b) $f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x}$ c) $f(x) = \frac{3}{2}x\sqrt{x}$ d) $f(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}$

3) La dérivée de la fonction $\int_x^{x^2} f(t)dt$ est :

- a) $f(x^2) - f(x)$ b) $2xf(x^2) - f(x)$ c) $2f(x^2) - f(x)$ d) $2xf(x) - 1$

4) Soit A un point quelconque .l'application : $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) \circ h(A, -2)$ est une similitude directe dont la forme réduite de sa réciproque est :

- a) $r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right)$ b) $r\left(A, \frac{4\pi}{3}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right)$ c) $r\left(A, \frac{2\pi}{3}\right) \circ h\left(A, \frac{1}{2}\right)$

Exercice N° 2 : (6 pts)

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $(\overline{BC}, \overline{BC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $AB = 3$ et $BC = 4$

1) Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$.

a - Déterminer l'angle et le rapport de f .

b- Soit H le projeté orthogonal de B sur (AC) . Montrer que $f(H) = H$.

2) Soit $D = f(C)$

a- Montrer que D appartient à la droite (BH) .

b- Construire le point D .

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C .

On désigne par Ω le centre de g .

a- Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$

- b- Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$; construire alors le point E .
- c- Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que $\Omega \in (AC) \cap (BE)$.
- d- Construire Ω et l'axe de g .

Exercice N° 3 : (6 pts)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ Par $f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1}$

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Etudier les variations de f
- 2) Montrer que f réalise une bijection sur un intervalle que l'on déterminera.
- 3) Déterminer $f^{-1}(x)$

4) Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ Par $F(x) = \int_0^{\tan x} f(t) dt$

a- Montrer que F est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ et que $F'(x) = \tan^2 x + 2$.

b- Calculer $F(x)$.

c- Calculer l'aire A du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x = 0$; $x = 1$ et $y = 1$.

Exercice N° 4 : (4 pts)

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé

Soit f l'application de (P) de (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixes z' tel que $z' = -2i\bar{z} + 1 + 2i$.

- 1) Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le centre et le rapport.
- 2) Déterminer l'équation de l'axe de f .
- 3) Déterminer l'ensemble des points M de (P) tel que $\|\overline{\Omega M}\| = 2$

Correction du devoir de contrôle N° 2

Exercice N° 1:

1) d 2) a 3) b 4) c

Exercice N°2 :

1) a- Soit k le rapport de f et θ son angle :

$$k = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \theta \equiv (\overline{AB}, \overline{BC})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

b- Soit Ω le centre de f on a :

$$(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}) \equiv (\overline{\Omega B}, \overline{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

On conclut que Ω appartient au demi cercle de diamètre AB et au demi cercle de diamètre BC contenant H

D'où H est le centre de f puisque $f(B) \neq B$.

2) a- $D = f(C)$

$$(\overline{HC}, \overline{HD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{or} \quad (\overline{HB}, \overline{HC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{donc} \quad (\overline{HB}, \overline{HD}) \equiv \pi[2\pi] \quad \text{d'où} \quad D \in (HB).$$

b- $f(B) = C$ et $f(C) = D$

on conclut que $(\overline{BC}, \overline{CD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $(BC) \perp (CD)$

D'où D est l'intersection de (BH) avec la perpendiculaire à (BC) en C .

3) a- $f \circ g^{-1}(B) = B$ et $f \circ g^{-1}(C) = C$

Nous donne le résultat

$$b- S_{(BC)}(E) = D.$$

$$c- g \circ g = h(\Omega, k^2)$$

$$g \circ g(A) = g(B) = C \quad \text{Donc} \quad \Omega \in (AC)$$

$$g \circ g(B) = g(C) = E \quad \text{Donc} \quad \Omega \in (BE)$$

d'ou la construction de Ω

d- $g(A) = B$ donc Δ est la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle $(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B})$

Exercice N°3 :

1) f est définie continue dérivable sur \mathbb{R} et $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

2) $J =]1, 2]$

$$3) f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{2-x}{x+1}}$$

4) a- $F'(x) = (1 + \tan^2 x)f(\tan x) = \dots = \dots$

$$b- F'(x) = \tan^2 x + 2 = \tan^2 x + 1 + 1$$

$$\text{Donc } F(x) = \tan x + x + c$$

comme $F(0) = 0$ donc $c=0$ d'où $F(x) = \tan x + x$.

$$\begin{aligned} C- A &= \int_0^1 |f(t) - 1| dt = \int_0^1 f(t) - 1 dt \text{ car } f(t) \geq 1 \forall t \in [0, +\infty[\\ &= \int_0^1 f(t) dt - 1 = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{\pi}{4} \text{ ua} \end{aligned}$$

Exercice N°4 :

1) f est similitude indirecte de rapport $k = |-2i| = 2$ et de centre Ω tel que $Z_\Omega = 1$

2) $\Delta : x + y - 1 = 0$

3) on conclut que $\Omega M' = 2\Omega M$

$\Omega M' = 2$ d'où $\Omega M = 1$ finalement M décrit le cercle de centre Ω et de rayon 1.